Лекция 7. Банаховы пространства

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

17 декабря 2012 г.

Определение.

Определение 1. Банаховым пространством $\mathbb{B}$ называется нормированное пространство, которое является полным как метрическое пространство относительно метрики

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

где $\|\cdot\|$ — это норма данного нормированного пространства.

Вопрос: является ли всякое нормированное пространство линейным пространством?

Примеры.

Прежде всего, пространством Лебега $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ при $\in [1, +\infty)$ является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Пространство l^p при $p \in [1, +\infty)$ является банаховым относительно нормы

$$\|\{x\}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Определение 2. Норма $\|\cdot\|_1$ на банаховом пространстве $\mathbb{B}, \|\cdot\|$ называется эквивалентной исходной, если найдутся такие положительные числа c_1 и c_2, что имеет место неравенство

$$c_1\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant c_2\|f\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}.$$

Очевидно, что $c_1 \leqslant c_2$.

Заметим, что при этом соответствующее линейное нормированное пространство $\mathbb{B}$ будет тоже банаховым относительно эквивалентной нормы $\|\cdot\|_1$.

Пример.

Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно стандартной нормы

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Теперь рассмотрим новую норму

$$\|f\|_1 = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Докажем, что это эквивалентная норма.
□ Имеет место цепочка неравенств

$$\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant 2\|f\|.$$

Стало быть, нормированное относительно нормы $\|\cdot\|_1$ линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ является также банаховым.

Неэквивалентные нормы. Пример.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$, на котором введем следующую норму:

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f^{'}(x)|.$$

Относительно этой нормы линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ является банаховым.

Рассмотрим на этом же линейном пространстве другую норму

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Относительно, этой нормы рассматриваемое линейное пространство не является банаховым. Если применить процедуру пополнения, то его пополнением окажется банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$.

Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах.

Пусть $(\mathbb{N}_1, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ — это два нормированных пространства, причем

$$A : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$$

это линейный непрерывный оператор. Все такие операторы образуют линейное пространство (с очевидными операциями сложения и умножения на число), которое мы обозначим через

$$\mathcal{L}(N_1, N_2).$$

Введем норму на $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ следующим образом:

$$\|A\| \equiv \sup_{x \neq \theta,\ x \in \mathbb{N}_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Проверим, что это норма — на доске!



Эквивалентное определение нормы линейного оператора.

Заметим, что в силу свойств нормы имеет место следующая цепочка равенств:

$$\|A\| \equiv \sup_{x\neq\theta,\, x\in\mathbb{N}_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq\theta,\, x\in\mathbb{N}_1} \left\| A\frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = \sup_{\|y\|_1=1} \|Ay\|_2.$$

Возникает вопрос о том, при каких условиях линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ является банаховым относительно введенной операторной нормы?

Теорема

Пусть $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ *является банаховым пространством, тогда* $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ *банахово.*

Доказательство теоремы-1.

Пусть $\{A_n\}$ — это фундаментальная по операторной норме последовательность операторов, т. е.

$$\|A_n - A_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Докажем, что существует

$$A \in \mathcal{L}(N_1, N_2),$$

такой что

$$\|A_n - A\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Для всякого $x \in \mathbb{N}_1$ последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в банаховом пространстве $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$. Действительно,

$$\|A_n x - A_m x\|_2 \leqslant \|A_n - A_m\| \|x\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Доказательство теоремы-2.

В силу полноты $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ имеем

$$A_n x \to y \quad \text{в} \quad (\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2).$$

Введем оператор

$$Ax = y.$$

Докажем его линейность.

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2$$

причем

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \to A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

и

$$A_n x_1 \to A x_1 \quad \text{и} \quad A_n x_2 \to A x_2.$$

Значит,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2.$$

Доказательство теоремы-3.

Докажем теперь ограниченность оператора A.

$$\big|\|A_n\| - \|A_m\|\big| \leqslant \|A_n - A_m\|.$$

Итак, из фундаментальности $\{A_n\}$ вытекает фундаментальность $\{\|A_n\|\}$. Значит,

$$\|A_n\| \to c_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак,

$$\|Ax\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\|_2 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \|A_n\| \|x\|_1 = c_1 \|x\|_1.$$

Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_2 \leqslant c_1.$$

Доказательство теоремы-4.

Нам осталось доказать, что

$$\|A - A_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Действительно,

$$\|(A - A_n)x\|_2 = \lim_{m\to+\infty} \|(A_m - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|A_m - A_n\|.$$

Следовательно,

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|(A - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|A_m - A_n\|,$$

а в силу фундаментальности $\{A_n\}$ правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой при больших n.

Теорема доказана.



Линейные функционалы.

Прежде всего будем называть сходимость по норме

$$\|x - x_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

сильной сходимостью.

Рассмотрим частный, но очень важный случай линейных операторов — линейные функционалы:

$$f : (\mathbb{B}, \|\cdot\|) \to \mathbb{C},$$

причем

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{B}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.



Сопряженное пространство.

Прежде всего вместо обозначения действия линейного функционала $f(\cdot)$ на элементе $x \in \mathbb{B}$ будем обозначать как

$$\langle f, x \rangle \quad \text{вместо} \quad f(x).$$

Очевидно, что множество линейных функционалов — само линейное пространство.

Определение 3. Множество всех линейных функционалов над банаховым пространством $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ непрерывных в том смысле, что

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для всех

$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad (\mathbb{B}, \|\cdot\|),$$

будем обозначать через $\mathbb{B}^*$.



Норма на сопряженном пространстве.

Поскольку линейные функционалы — это линейные операторы, действующие из $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ в $\mathbb{C}$, а

$$\mathbb{C} \quad \text{полное банахово пространство!},$$

то в силу доказанной теоремы пространство $\mathbb{B}^*$ является банаховым относительно следующей операторной нормы:

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x\rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Заметим, что сходимость последовательности $\{f_n\}$ по этой норме

$$\|f - f_n\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

является в наших обозначениях СИЛЬНОЙ сходимостью!!!



Слабая и $*$-слабая сходимость.

Если есть сильная сходимость в банаховом пространстве $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, то должна существовать и слабая сходимость.

Определение 4. Слабой сходимостью последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{B}$ называется сходимость числовой последовательности

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \text{для каждого фиксированного} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Более того, на $\mathbb{B}^*$ можно ввести еще одну сходимость — $*-$слабую сходимость.

Определение 5. $*-$Слабой сходимостью последовательности $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ называется сходимость следующей числовой последовательности

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{B}.$$

Обозначение.

Сильную сходимость мы будем обозначать как

$$x_n \to x.$$

Слабую сходимость будем обозначать как

$$x_n \rightharpoonup x.$$

$*-$Слабую сходимость будем обозначать как

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

Примеры. Пространства Лебега.

Теперь мы проиллюстрируем введенные в этой лекции новые понятия на примере пространств Лебега. Дадим определения сильной, слабой и $*-$слабой сходимостей для пространств $L^p(\Omega)$, где Ω область эвклидова пространства $\mathbb{R}^N$, а $p \in [1, +\infty]$.

Сильная сходимость и слабая сходимость.

Определение 6. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ *называется сильно сходящейся к элементу* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $p \in [1, +\infty]$, *если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_p = 0.$$

Определение 7. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ *называется слабо сходящейся к элементу* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $p \in [1, +\infty)$, *если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n \to +\infty} \langle f, u_n \rangle_p = \langle f, u \rangle_p \quad \text{для всех} \quad f \in (L^p(\Omega))^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^p(\Omega)$ *и* $(L^p(\Omega))^*$ *при* $p \in [1, +\infty)$.

$*-$Слабая сходимость.

Определение 8. *Последовательность* $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ *называется* $*-$*слабо сходящейся к функции* $f \in L^\infty(\Omega)$, *если для всех* $u \in L^1(\Omega)$ *имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_n \langle f_n, u\rangle_\infty = \langle f, u\rangle_\infty \quad \text{для всех} \quad u \in L^1(\Omega),$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^\infty(\Omega)$ *и* $L^1(\Omega)$.

Теорема

Банахово пространство $(L^p(\Omega))^*$ *при* $p \in (1, +\infty)$ *совпадает с банаховым пространством* $L^q(\Omega)$ *при* $q = p/(p-1)$, *а в случае* $p = 1$ *банахово пространство* $\left(L^1(\Omega)\right)^*$ *совпадает с пространством* $L^\infty(\Omega)$.

Дважды сопряженные пространства.

Итак, мы ранее построили сопряженное банахово пространство $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$. Рассмотрим теперь линейное пространство всех линейных функционалов над этим банаховым пространством.

$$\langle x^{**}, f\rangle_* \quad \text{для всех} \quad x^{**} \in (\mathbb{B}^*)^*, \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Определение 9. Линейное пространство всех линейных функционалов x^{**} над банаховым пространством $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$ непрерывных в том смысле, что

$$\langle x^{**}, f_n\rangle_* \to \langle x^{**}, f\rangle_*$$

как только

$$\|f_n - f\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

будем называть дважды сопряженным и обозначать как $\mathbb{B}^{**}$.

Норма дважды сопряженного пространства.

Поскольку каждый элемент $x^{**} \in \mathbb{B}^{**}$ — это линейный и непрерывный оператор, действующий как

$$x^{**} : (\mathbb{B}^{*}, \|\cdot\|_{*}) \to \mathbb{C},$$

то как и ранее приходим к выводу, что $\mathbb{B}^{**}$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x^{**}\|_{**} \equiv \sup_{\|f\|_{*}=1} |\langle x^{**}, f\rangle_{*}| \, .$$

Сходимость последовательности $\{x_n^{**}\} \subset \mathbb{B}^{**}$ по введенной норме

$$\|x_n^{**} - x^{**}\|_{**} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

в наших обозначениях является сильной сходимостью.



Слабая сходимость в $\mathbb{B}^*$.

Разумеется, что после того как мы ввели в рассмотрение банахово пространство $(\mathbb{B}^{**}, \|\cdot\|_{**})$ мы можем ввести на банаховом пространстве $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$ обычную слабую сходимость.

Определение 10. Сходимость числовой последовательности

$$\langle x^{**}, f_n\rangle_* \to \langle x^{**}, f\rangle \quad \text{для каждого} \quad x^{**} \in \mathbb{B}^{**}.$$

будем называть слабой сходимостью

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Слабая и $*-$слабая сходимости на банаховом пространстве $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$.

Таким образом, мы построили три типа сходимостей на банаховом пространстве

$$(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*),$$

которое является сопряженным к исходному банахову пространству

$$(\mathbb{B}, \|\cdot\|).$$

Вопрос как они связаны.

Сильная сходимость влечет за собой слабую, а слабая сходимость влечет за собой $*-$слабую.

Рефлексивность.

Заметим, что по построению любой элемент $x \in \mathbb{B}$ порождает линейный непрерывный функционал над банаховым пространством $\mathbb{B}^*$ согласно формуле

$$\langle x, f \rangle : \mathbb{B}^* \to \mathbb{C}.$$

Значит, имеет место вложение

$$\mathrm{J} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**},$$

причем можно доказать, что соответствующий оператор вложения J является изометрией, а именно имеет место равенство

$$\|x^{**}\|_{**} = \|x\| \quad \text{при} \quad x^{**} = \mathrm{J}x.$$

В том случае, когда оператор J является сюръекцией, то банахово пространство $\mathbb{B}$ называется рефлексивным.

Связь слабой и $*-$слабой сходимости.

Заметим, что если банахово пространство $\mathbb{B}$ является рефлексивным, то имеет место равенство скобок двойственностей

$$\langle x^{**}, f\rangle_{*} = \langle f, x\rangle,$$

где

$$x^{**} \in \mathbb{B}^{**}, \quad f \in \mathbb{B}^{*}, \quad x \in \mathbb{B},$$

причем

$$x^{**} = \mathrm{J}x.$$

И поэтому для рефлексивных банаховых пространств $\mathbb{B}$ слабая и $*-$слабая сходимости на банаховом пространстве $\mathbb{B}^{*}$ совпадают. Хотя в общем случае, как мы уже говорили, слабая сходимость «сильнее» $*-$слабой сходимости.

Один интересный результат.

Теорема

Если $\mathbb{B}$ — это рефлексивное нормированное пространство, то оно является банаховым.

Доказательство на доске.

Теорема Хана–Банаха.

Теорема

Пусть X *— это вещественное векторное пространство, а* $X_0 \subset X$ *— векторное подпространство, на котором задан линейный функционал* $\langle \lambda, x \rangle$, *причем имеет место неравенство*

$$\langle \lambda, x \rangle \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X_0,$$

где

$$p(tx+(1-t)y) \leqslant tp(x)+(1-t)p(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in X, \quad t \in [0, 1],$$

$$p(tx) = tp(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X, \quad t > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал $\langle \Lambda, x \rangle$, *определенный на* X *и имеют место свойства*

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \text{на} \quad X_0,$$

Доказательство теоремы Хана–Банаха-1.

Итак, пусть

$$\{x_0\} \in X \backslash X_0 \neq \emptyset,$$

поскольку в случае $X = X_0$ доказывать нечего. Пусть $x, y \in X_0$. Тогда

$$\langle \lambda, x + y \rangle = \langle \lambda, x \rangle + \langle \lambda, y \rangle \leqslant p(x + y) \leqslant p(x - x_0) + p(y + x_0).$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0) \leqslant p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle.$$

Правая часть не зависит от x, а левая — от y, поэтому найдется такая постоянная $a = a(x_0)$, что имеет место неравенство

$$\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0) \leqslant a \leqslant p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle,$$

из которого получим

$$\langle \lambda, x \rangle - a \leqslant p(x - x_0), \quad \langle \lambda, y \rangle + a \leqslant p(y + x_0). \tag{1}$$

Доказательство теоремы Хана–Банаха-2.

Пусть

$$X_1 = X_0 \oplus tx_0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Определим на X_1 функционал

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle \stackrel{def:}{=} \langle \lambda, x \rangle + ta, \quad x \in X_0.$$

Линейность функционала Λ очевидна. Докажем, что он удовлетворяет следующему неравенству:

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle \leqslant p(x + tx_0) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

С этой целью воспользуемся неравенствами (1).



Доказательство теоремы Хана–Банаха-3.

Пусть $t > 0$, тогда

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle = \langle \lambda, x \rangle + ta =$$
$$= t\left(\left\langle \lambda, \frac{x}{t} \right\rangle + a\right) \leqslant tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0),$$

$$\langle \Lambda, x - tx_0 \rangle = \langle \lambda, x \rangle - ta =$$
$$= t\left(\left\langle \lambda, \frac{x}{t} \right\rangle - +a\right) \leqslant tp\left(\frac{x}{t} - x_0\right) = p(x - tx_0).$$

Таким образом, требуемое продолжение линейного функционала λ получено.
Далее нужно воспользоваться леммой Цорна и получить требуемый результат.

Теорема доказана.



Комплексный вариант теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть X *— комплексно-линейное пространство, а* $X_0 \subset X$ *— его подпространство. Пусть для линейного функционала* $\langle \lambda, x \rangle$*, определенного на* X_0*, выполнено неравенство*

$$|\langle \lambda, x \rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X_0,$$

где $p(x)$ *— полунорма, определенная на* X*. Тогда существует такой линейный функционал* $\langle \Lambda, x \rangle$*, что*

$$|\langle \Lambda, x \rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X$$

и

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \text{для} \quad x \in X_0.$$



Доказательство комплексного варианта теоремы Хана–Банаха-1.

Рассмотрим вещественный функционал

$$\operatorname{Re}\langle \lambda, x \rangle.$$

Пусть

$$\operatorname{Re}\langle \Lambda, x \rangle$$

— это его расширение, полученное согласно уже доказанной теоремы Хана–Банаха. Положим по определению

$$\langle \Lambda, x \rangle = \operatorname{Re}\langle \Lambda, x \rangle - i \operatorname{Re}\langle \Lambda, ix \rangle$$

□ Эта формула получается так.

$$l(x) = \operatorname{Re}\langle \Lambda, x \rangle, \; l(ix) = \operatorname{Re}\langle \Lambda, ix \rangle = \operatorname{Re}\left(i\langle \Lambda, x \rangle\right) = -\operatorname{Im}\langle \Lambda, x \rangle.$$

Значит,

$$\langle \Lambda, x \rangle = l(x) - il(ix). \quad \boxtimes$$

Это и есть искомое расширение.

Доказательство комплексного варианта теоремы Хана–Банаха-2.

Проверим неравенство, что

$$|\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant p(x).$$

Действительно,

$$\langle \Lambda, x\rangle = |\langle \Lambda, x\rangle| e^{i\vartheta}.$$

Но тогда

$$|\langle \Lambda, x\rangle| = \operatorname{Re} |\langle \Lambda, x\rangle| = \operatorname{Re}\langle \Lambda, e^{-i\vartheta} x\rangle \leqslant p(xe^{-i\vartheta}) = p(x).$$

Теорема доказана.

Первое следствие из теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть X *— это нормированное линейное пространство, причем*

$$Y \subset X \quad \text{и} \quad \lambda \in Y^*,$$

где Y *линейное подпространство* X. *Тогда найдется такое продолжение* Λ *функционала* λ, *что имеет место равенство*

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Доказательство-1.

Возьмем в качестве полунормы

$$p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|.$$

Очевидно, имеет место оценка

$$|\langle \lambda, x\rangle| \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in Y.$$

В силу теоремы Хана–Банаха существует линейный функционал Λ такой, что

$$|\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\| \quad \text{при} \quad x \in X.$$

Возьмем $supremumu$ по $\|x\| = 1$ от обеих частей и получим неравенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}.$$



Доказательство-2.

С другой стороны,

$$|\langle \lambda, x \rangle| = |\langle \Lambda, x \rangle| \quad \text{для} \quad x \in Y,$$

поэтому взяв $supremum$ по $x \in Y$ получим неравенство

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|x\|=1, x \in Y} |\langle \lambda, x \rangle| = \sup_{\|x\|=1, x \in Y} |\langle \Lambda, x \rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\|=1, x \in X} |\langle \Lambda, x \rangle| = \|\Lambda\|_{X^*}.$$

Итак, первое следствие доказано.

Второе следствие из теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть $y \in X$, *где* X *— это нормированное пространство. Тогда существует ненулевой функционал* $\Lambda \in X^*$ *такой, что*

$$\langle \Lambda, y \rangle = \|\Lambda\|_{X^*} \|y\|.$$

Доказательство.

Пусть

$$Y = \left\{ay|\ a \in \mathbb{C}^1\right\} \quad \text{и} \quad \langle \lambda, ay\rangle = a\|y\|$$

— это линейный функционал над $Y \subset X$. Согласно первому следствию из теоремы Хана–Банаха найдется линейный функционал

$$\Lambda \in X^*, \quad \|\lambda\|_{Y^*} = \|\Lambda\|_{X^*},$$

но

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|y\|=1} |\langle \lambda, y\rangle| = 1,$$

значит,

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1.$$

Причем на Y

$$\langle \Lambda, ay\rangle = \langle \lambda, ay\rangle = a\|y\| \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{C}^1.$$

Следовательно,

$$\langle \Lambda, y\rangle = \|\Lambda\|_{X^*}\|y\|.$$

Третье следствие из теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть Z *— подпространство нормированного пространства* X *и пусть* $y \in X$, *причем*

$$\operatorname{distance}\{y, Z\} = d > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал $\Lambda \in X^*$, *что*

$$\|\Lambda\|_{X^*} \leqslant 1, \quad \langle \Lambda, y \rangle = d, \quad \langle \Lambda, z \rangle = 0$$

для всех $z \in Z$.

Четвертое следствие из теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть $\mathbb{B}$ *— банахово пространство. Если* $\mathbb{B}^*$ *сепарабельно, то* $\mathbb{B}$ *также сепарабельно.*

Доказательство-1.

Пусть $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — счетное всюду плотное в $\mathbb{B}^*$ множество. Теперь выберем $\{x_n\} \in \mathbb{B}$ таким образом, чтобы имели место свойства

$$\|x_n\| = 1, \quad |\langle \lambda_n, x_n \rangle| \geqslant \|\lambda_n\|_*/2.$$

□ Поскольку

$$\|\lambda_n\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle \lambda_n, x \rangle| .$$

Поэтому такая последовательность $\{x_n\}$ существует. ⊠.

Доказательство-2.

Пусть

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,\middle|\, \alpha_k \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Докажем, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathbb{B}$. Пусть нет. Тогда существует такой элемент

$$y \in \mathbb{B} \backslash \overline{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad \lambda \in \mathbb{B}^*,$$

что

$$\langle \lambda, y \rangle \neq 0, \quad \langle \lambda, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\mathcal{D}}.$$

В силу плотности $\{\lambda_n\}$ в $\mathbb{B}^*$, с одной стороны, найдется такая подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$ такая, что

$$\lambda_{n_k} \to \lambda \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*, \quad \text{т. е.} \quad \|\lambda - \lambda_{n_k}\| \to 0.$$

Доказательство-3.

С другой стороны, имеет место цепочка

$$\|\lambda_{n_k}\|_*/2 \leqslant |\langle \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| = |\langle \lambda - \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| \leqslant \|\lambda - \lambda_{n_k}\|_* \to 0.$$

Значит,

$$\lambda_{n_k} \to \theta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*,$$

а значит

$$\lambda = \theta.$$

Противоречие, доказывающее теорему.

Теорема доказана.

Теоремы Банаха–Штейнгауза.

Пусть

$$F_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2, \quad \alpha \in I$$

— это семейство не обязательно линейных отображений банаховых пространств относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, соответственно.

В этом разделе лекций мы рассмотрим две теоремы, которые все принято называть теоремами Банаха–Штейнгауза.

Как мы покажем все эти теоремы являются следствиями теоремы Бэра о категориях. Но сначала докажем теорему о равномерной ограниченности

Теорема о равномерной ограниченности.

Теорема

Пусть

(i) *оператор* F_α *непрерывен для каждого* $\alpha \in I$;

(ii)

$$\|F_\alpha(x+y)\|_2 \leqslant \|F_\alpha(x)+F_\alpha(y)\|_2, \quad \|F_\alpha(\lambda x)\|_2 \leqslant |\lambda| \|F_\alpha(x)\|_2$$

для всех $x, y \in \mathbb{B}_1$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ *и* $\alpha \in I$;

(iii) *для каждого* $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty.$$

Тогда семейство отображений $\{F_\alpha\}$ *равномерно по* $\alpha \in I$ *непрерывно в нуле:* $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\alpha \in I,\, \|x\|_1 < \delta} \|F_\alpha(x)\|_2 = 0.$

Доказательство-1.

Докажем, что для каждого F_α множество

$$b_n = \{x \in \mathbb{B}_1 : \ \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\}$$

замкнуто.

☐ Действительно, пусть

$$x_m \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{и} \quad \{x_m\} \subset b_n,$$

тогда в силу непрерывности F_α

$$F_\alpha(x_m) \to F_\alpha(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Но

$$\|F_\alpha(x_m)\|_2 \leqslant n \Rightarrow \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n \Rightarrow x \in B_n.$$

☒ Поэтому множество

$$X_n = \bigcap_{\alpha \in I} b_n \quad \text{замкнуто.}$$



Доказательство-2.

Докажем, что

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

$\square$ Действительно, заметим, что в силу условия (iii)

$$\sup_{\alpha\in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty,$$

а в силу определения b_n имеем

$$X_n = \left\{x \in \mathbb{B}_1 : \sup_{\alpha\in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\right\},$$

но тогда из (iii) вытекает, что каждый элемент $x \in \mathbb{B}_1$ принадлежит какому-то X_n. $\boxtimes$

Доказательство-3.

Каждое X_n замкнуто в $\mathbb{B}_1$, а $\mathbb{B}_1$ является банаховым, поэтому в силу доказанной ранее теоремы Бэра о категориях найдется такое $n \in \mathbb{N}$ и такой открытый шар

$$O(x_0, \varepsilon) \subset X_n.$$

Это означает, что

$$\text{для всех} \quad \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x_0 + y)\|_2 \leqslant n.$$

В своя очередь из свойства (ii) вытекает неравенство

$$\text{для всех} \quad \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y + x_0)\|_2 + \\ + \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(-x_0)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

Доказательство-4.

Итак,

$$\text{для всех} \quad \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

В силу свойства (ii) однородности F_α имеем

$$y = \frac{\varepsilon}{\delta}x, \quad \sup_{\alpha\in I,\ \|x\|<\delta}\|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\left(n + c_0(x_0)\right).$$

Теорема доказана.

Первая теорема Банаха–Штейнгауза.

Теорема

Пусть $\{T_\alpha\}$ *— это семейство линейных и непрерывных операторов*

$$T_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in I.$$

Пусть для каждого $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|_2 \leqslant c(x) < +\infty,$$

тогда

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{1\to 2} < +\infty.$$

Доказательство-1.

Применим теорему о равномерной ограниченности к семейству

$$F_\alpha = T_\alpha.$$

Тогда получим, что

$$\sup_{\alpha \in I,\ \|x\|_1 < \delta} \|T_\alpha x\|_2 < 1,$$

но отсюда заменой получим, что

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{1 \to 2} = \sup_{\alpha \in I,\ \|z\|_1 < 1} \|T_\alpha x\|_2 < 1/\delta.$$

Теорема доказана.

Вторая теорема Банаха–Штейнгауза.

Теорема

Пусть $\{T_n\}$ *— это последовательность линейных непрерывных операторов, причем*

$$T_n : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

и

$$T_n x \to T_0 x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathbb{B}_1.$$

Тогда T_0 *— линейный и непрерывный оператор.*

Доказательство-1.

Из сильной сходимости вытекает, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\|_2 \leqslant c_1(x) < +\infty,$$

но тогда из первой теоремы Банаха–Штейнгауза получим, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|_{1\to 2} < +\infty,$$

тогда

$$\|T_0 x\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\|T_n x\|_2 \leqslant \lim_{n\to+\infty}\|T_n\|_{1\to 2}\|x\|_1 \leqslant c_2\|x\|_1.$$

Значит, T_0 — это ограниченный оператор, а в силу линейности непрерывный.

Теорема доказана.



Операторные топологии-1.

По ходу лекции мы столкнулись уже с двумя типами сходимостей операторов из пространства

$$\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2).$$

Первый тип — это равномерная сходимость:

$$\|A_n - A\|_{1\to 2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Второй тип — это сильная сходимость:

$$\|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}_1.$$

Операторные топологии-2.

Наконец, еще один тип операторной сходимости — это слабая сходимость

$$\langle f, (A_n - A)x\rangle \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}_1, \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}_2^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}_2$ и $\mathbb{B}_2^*$.

Разумеется у пространства $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ есть и "обычные"типы сходимостей как и у всякого банахова пространства и при этом введенная только что слабая операторная сходимость, вообще говоря, отличается от стандартной слабой сходимости.